

# Aplikasi Sistem Monitoring Produksi Menggunakan Diagram Kontrol Multivariat *Fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling berbasis *Alpha-cut* dan Transformasi Median

## *Application of Production Monitoring System using Fuzzy Multivariate T<sup>2</sup> Hotelling Control Chart Based on Alpha-cut and Median Transformation*

Nur Rezky Safitriani<sup>a,1,\*</sup>, Erlyne Nadhilah Widyaningrum<sup>b,2</sup>, Rizka Amalia Putri<sup>c,3</sup>, Husna Afanynd<sup>d,4</sup>  
dan Morina A. Fathan<sup>a,5</sup>

<sup>a</sup>Program Studi Statistika, Universitas Tadulako, Palu, Indonesia

<sup>b</sup>Program Studi Statistika, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia

<sup>c</sup>Program Studi Statistika, Universitas Riau, Pekanbaru, Indonesia

<sup>d</sup>Program Studi Statistika, Universitas Sebelas Maret, Surakarta, Indonesia

<sup>1</sup>[rezky.nrs@untad.ac.id](mailto:rezky.nrs@untad.ac.id); <sup>2</sup>[erlynenadhilah@fmipa.unmul.ac.id](mailto:erlynenadhilah@fmipa.unmul.ac.id); <sup>3</sup>[rizkaamaliaputri@lecturer.unri.ac.id](mailto:rizkaamaliaputri@lecturer.unri.ac.id);

<sup>4</sup>[husnafanynk@staff.uns.ac.id](mailto:husnafanynk@staff.uns.ac.id); <sup>5</sup>[morinafathan@untad.ac.id](mailto:morinafathan@untad.ac.id)

\*corresponding author

Informasi Artikel	ABSTRAK
<p>Diserahkan : 10 Juli 2025 Diterima : 13 Agustus 2025 Direvisi : 27 Agustus 2025 Diterbitkan : 28 Agustus 2025</p> <p><b>Kata Kunci:</b> pengendalian kualitas diagram kontrol <i>fuzzy</i> <i>alpha-cut</i> transformasi median</p> <p><b>Keywords:</b> quality control control chart <i>fuzzy</i> <i>alpha-cut</i> median transformation</p> <p>This is an open access article under the <a href="https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/">CC-BY-SA</a> license.</p> 	<p>Pengendalian kualitas produksi yang adaptif menjadi kebutuhan mendesak dalam menghadapi data multivariat dengan ketidakpastian, disertai tuntutan untuk meningkatkan kualitas produk. Hal ini dapat diatasi menggunakan teori himpunan <i>fuzzy</i> melalui alat <i>Statistical Process Control</i> berupa diagram kontrol. Penelitian ini mengembangkan aplikasi sistem monitoring produksi menggunakan diagram kontrol multivariat <i>fuzzy T<sup>2</sup></i> Hotelling berbasis <i>alpha-cut</i> dan transformasi median. Aplikasinya dilakukan pada industri material bangunan di UD Tiga Beton sebagai penghasil batako <i>press</i>. Monitoring dilakukan pada dua karakteristik kualitas yang saling berkorelasi, yaitu kondisi fisik dan bidang permukaan, yang direpresentasikan dalam bentuk linguistik. Data pengamatan dikonversi ke dalam bilangan <i>fuzzy</i> menggunakan <i>Triangular Fuzzy Number</i> dan proses defuzzifikasi melalui transformasi median serta tambahan <i>alpha-cut</i> sebesar 0,6 agar dapat monitoring pergeseran <i>mean</i> yang kecil. Hasil penerapannya menunjukkan bahwa empat pengamatan terdeteksi berada di luar batas sehingga mengindikasikan proses produksi berada dalam keadaan <i>out of control</i>. Dengan demikian, aplikasi sistem ini terbukti mampu mendeteksi penyimpangan proses secara lebih akurat dan praktis. Diagram kontrol <i>fuzzy</i> multivariat berbasis <i>alpha-cut</i> dan transformasi median menjadi alternatif yang adaptif dalam pengendalian kualitas pada berbagai produksi.</p> <p><b>ABSTRACT</b></p> <p><i>Adaptive quality control has become an urgent necessity in addressing multivariate data with uncertainty, alongside increasing demands for improved product quality. This challenge can be addressed using fuzzy set theory through Statistical Process Control tools which is a control chart. This research develops an application of production monitoring system using multivariate fuzzy T<sup>2</sup> Hotelling control chart based on alpha-cut and median transformation. Its application to the building material industry, UD Tiga Beton, as a produces press bricks. Monitoring focuses on two correlated quality characteristics are physical condition and surface flatness as represented using linguistic variables. Observational data are converted into fuzzy numbers using the Triangular Fuzzy Number approach and defuzzification process through median transformation and additional alpha-cut value of 0,6 to monitoring small mean shifts. The implementation results show that four observations were detected outside the control limits, indicating that the production process was out of control state. Thus, this system application has proven capable of detecting process deviations more accuracy and practicality. The multivariate fuzzy control chart based on alpha-cut and median transformation serves an adaptive alternative for quality control across various types of production.</i></p>

## I. Pendahuluan

Perkembangan pesat teknologi saat ini menjadi ajang persaingan industri dalam mempertahankan daya saing yang menuntut peningkatan kualitas produk. Pengaruh kualitas berperan penting dalam penentuan tingkat kepuasan konsumen sehingga menjadi hal krusial bagi perusahaan [1]. Salah satu upaya yang harus dilakukan perusahaan dalam mempertahankan kualitas produk adalah monitoring proses produksi secara statistik atau disebut *Statistical Process Control* (SPC). Alat SPC banyak digunakan di berbagai industri dengan diagram kontrol sebagai alat utama untuk memantau apakah proses berjalan dalam kondisi terkontrol atau tidak [2].

Dalam era industri modern, kebutuhan akan diagram kontrol yang adaptif semakin mendesak terutama untuk data multivariat dengan ketidakpastian. Hal ini dikarenakan kualitas suatu produk sangat bergantung pada karakteristik kualitas yang saling berkorelasi sehingga penggunaan diagram kontrol multivariat menjadi lebih tepat [3]. Selain itu, dalam berbagai karakteristik kualitas produk tidak selalu dapat diklasifikasikan secara biner tetapi perlu kriteria linguistik seperti baik, kurang baik, cacat, dan lain-lain [4]. Oleh karena itu, untuk mengatasi ambiguitas karakteristik kualitas maka digunakan teori himpunan *fuzzy*.

Salah satu industri yang sangat berkembang saat ini adalah industri material bangunan. Hal ini terlihat dari meningkatkan jumlah permintaan rumah dan investasi properti saat ini. Salah satu material yang sangat berperan penting dalam proses konstruksi bangunan adalah material dinding khususnya batako *press* yang banyak diminati masyarakat. Salah satu perusahaan penghasil batako *press* terbesar di wilayah Sulawesi Tengah adalah UD Tiga Beton. Berdasarkan Standar Nasional Indonesia 03-0349-1989, syarat mutu produksi batako *press* ada tiga yakni ukuran, kuat tekan, dan sifat tampak. Dari ketiga syarat mutu tersebut, kondisi dari sifat tampak dapat mempengaruhi kepuasan pelanggan dan harga penjualan. Monitoring produksi batako *press* secara statistik berdasarkan sifat tampak terdiri dari dua karakteristik kualitas yaitu kondisi fisik dan bidang permukaan yang saling berkorelasi sehingga tepat untuk menggunakan diagram kontrol multivariat. Namun, kedua karakteristik kualitas tersebut perlu dinyatakan secara linguistik sehingga perlu teori himpunan *fuzzy*.

Diagram kontrol *fuzzy* multivariat terbukti mampu mengontrol kualitas produk dengan lebih akurat dibandingkan diagram kontrol konvensional [5]. Pada pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat perlu dilakukan transformasi data dari himpunan bilangan *crisp* menjadi himpunan bilangan *fuzzy*. Teknik transformasi tersebut terdiri atas 4 jenis yaitu *fuzzy mode transformation*, *fuzzy median transformation*, *fuzzy average transformation*, dan  *$\alpha$ -level fuzzy midrange transformation*. Teknik *fuzzy median transformation* sesuai digunakan untuk menghitung pusat kecenderungan dari sebuah distribusi pada data yang berbentuk asimetris [6]. Hal ini dikarenakan distribusi internal data *fuzzy* memungkinkan terjadi asimetris, sehingga *fuzzy median transformation* diusulkan untuk mengkonversi.

Penelitian mengenai diagram kontrol *fuzzy* multivariat untuk monitoring *mean* proses pertama kali menunjukkan diagram kontrol  $T^2$  Hotelling dengan pendekatan fungsi keanggotaan lebih sensitif dibandingkan pendekatan probabilitas [7]. Dimana fungsi keanggotaan merupakan komponen utama yang sangat berpengaruh dalam pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat. Fungsi keanggotaan yang paling sering digunakan adalah kurva segitiga atau *Triangular Fuzzy Number* (TFN). Sebelumnya telah ada penelitian diagram kontrol *fuzzy*  $T^2$  Hotelling menggunakan *fuzzy median transformation* dengan TFN yang menyimpulkan bahwa sensitif terhadap pergeseran *mean* pada proses produksi tetapi kurang sensitif pada pergeseran *mean* yang kecil [8]. Penelitian lain menunjukkan bahwa diagram kontrol *fuzzy*  $T^2$  Hotelling dengan TFN berbasis *alpha-cut* efisien dalam menangani proses sensitif yang memerlukan pemantau pergeseran *mean* yang kecil [9]. Namun, pada penelitian tersebut masih terbatas menggunakan transformasi *Common Output Measure* (COM) dan belum diaplikasikan secara langsung pada sistem monitoring produksi.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan mengembangkan penelitian sebelumnya dengan berfokus pada aplikasi sistem monitoring produksi yang mampu menangani data multivariat dengan ketidakpastian serta lebih sensitif terhadap pergeserannya. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan diagram kontrol *fuzzy*  $T^2$  Hotelling dengan fungsi keanggotaan TFN berbasis *alpha-cut* dan *median transformation*. Aplikasi penelitian ini dilakukan pada industri material bangunan di UD Tiga Beton sebagai penghasil batako *press* yang hingga saat ini belum menerapkan monitoring proses produksi secara statistik. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori pengendalian kualitas statistik dan meningkatkan efektivitas diagram kontrol *fuzzy* multivariat yang adaptif, akurat dan praktis pada berbagai industri.

## II. Metode

### A. Logika Fuzzy

Teori himpunan *fuzzy* merupakan perluasan dari teori himpunan klasik untuk menangani ketidakpastian. Nilai keanggotaan pada himpunan klasik hanya bernilai 0 dan 1, tetapi pada teori himpunan *fuzzy* berada dalam

interval 0 sampai 1. Teori ini dapat bertahan dengan ketidakpastian tanpa kehilangan efektivitas. Kontribusi utamanya adalah kemampuan untuk mempresentasikan data linguistik [6]. Himpunan *fuzzy* adalah pengelompokan suatu data berdasarkan atribut linguistik yang dinyatakan dalam fungsi keanggotaan. Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah kurva yang menunjukkan pemetaan titik nilai input data  $x$  pada sumbu  $x$  (horizontal) dengan nilai derajat keanggotaan ( $\mu(x)$ ) pada sumbu  $y$  (vertikal) yang mempunyai nilai interval 0 sampai 1. Salah satu cara yang digunakan mendapatkan nilai derajat keanggotaan melalui fungsi keanggotaan *fuzzy* menggunakan kurva segitiga sebagai berikut :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ (x - a)/(b - a) & ; a \leq x \leq b \\ (c - x)/(c - b) & ; b \leq x \leq c \end{cases} \quad (1)$$

Keterangan:

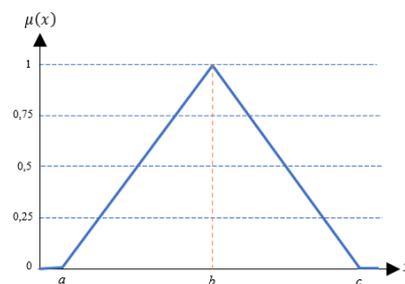
$a$  = nilai domain terkecil yang mempunyai derajat keanggotaan nol

$b$  = nilai domain yang mempunyai derajat keanggotaan satu

$c$  = nilai domain terbesar yang mempunyai derajat keanggotaan nol

$x$  = nilai input yang akan diubah ke dalam bilangan *fuzzy*

Persamaan (1) direpresentasikan bentuk kurva segitiga sebagai berikut:



Gambar 1. Ilustrasi Fungsi Keanggotaan Representasi Kurva Segitiga

### B. Diagram Kontrol Fuzzy Multivariat

Diagram kontrol  $T^2$  Hotelling menggunakan statistik  $T^2$  yang merupakan generalisasi dari distribusi *t-student* untuk memonitor *mean* proses pada lebih dari satu karakteristik kualitas yang saling berkorelasi secara bersama-sama. Pada umumnya, diagram kontrol  $T^2$  Hotelling digunakan untuk karakteristik kualitas yang diukur dalam skala numerik. Namun, telah dikembangkan diagram kontrol menggunakan pendekatan keanggotaan yang disebut diagram kontrol *fuzzy*  $T^2$  Hotelling.

Setiap anggota kategori dikarakteristikan dengan fungsi keanggotaan ( $\mu(x)$ ), dimana  $x$  adalah ukuran dari tingkat kualitas. Kemudian, membentuk matriks fungsi keanggotaan tiap karakteristik kualitas berdasarkan fungsi keanggotaan yang digunakan. Jika menggunakan representasi kurva segitiga maka matriks fungsi keanggotaan berukuran  $q_j \times 3$  dengan  $q_j$  adalah banyak kategori pada karakteristik kualitas. Matriks fungsi keanggotaan tiap karakteristik kualitas dinotasikan  $\Phi_j$  dimana  $j$  adalah karakteristik kualitas sehingga matriks yang terbentuk dengan menggunakan fungsi keanggotaan *Triangular Fuzzy Number* (TFN) sebagai berikut:

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \varphi_{j1} & \varphi_{j2} & \varphi_{j3} \\ \varphi_{j1} & \varphi_{j2} & \varphi_{j3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{j1} & \varphi_{j2} & \varphi_{j3} \end{bmatrix} ; j = 1, 2, \dots, l \quad (1)$$

Masing-masing karakteristik kualitas diasosiasikan dengan satu bagian himpunan *fuzzy*. Jika fungsi representasi kurva segitiga yang digunakan maka didapatkan vektor berukuran  $3 \times 1$  yang berisi *fuzzy input* yang merupakan ketiga titik dari segitiga dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\tilde{f}_{jk}^T = \mathbf{p}_{jk}^T \times \Phi_j \quad (2)$$

Keterangan:

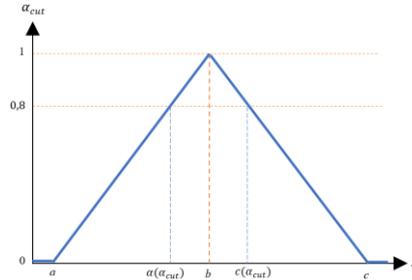
$\tilde{f}_{jk}^T$  = vektor nilai *fuzzy input* pada karakteristik kualitas ke- $j$  dan subgroup ke- $k$

$\mathbf{p}_{jk}^T$  = vektor berisi nilai proporsi tiap kategori pada karakteristik kualitas ke- $j$  dan subgroup ke- $k$

$\Phi_j$  = matriks *fuzzy set number* untuk setiap karakteristik kualitas dan kategori yang dikarakterisasi

dengan  $\tilde{f}_{jk}^T = [a_{1jk} \ a_{2jk} \ a_{3jk}]$  dan  $\mathbf{p}_{jk}^T = \left[ \frac{n_{1jk}}{n} \ \frac{n_{2jk}}{n} \ \frac{n_{3jk}}{n} \right]$  dimana  $k = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, l$ .

Penelitian mengenai diagram kontrol fuzzy  $T^2$  Hotelling berbasis *alpha-cut* telah dilakukan oleh Al-Refaik dkk (2019) yang menggunakan fungsi keanggotaan *Triangular Fuzzy Number* (TFN) dengan mengubah data fuzzy menjadi nilai *Common Output Measure* (COM). Sedangkan penelitian ini menggunakan proses fuzzifikasi untuk mengubah data fuzzy dengan nilai representatif dengan fungsi keanggotaan. Nilai  $a$  dan  $c$  pada kurva segitiga (Gambar 1) dihitung dengan tambahan *alpha-cut* yang didefinisikan sebagai  $a(\alpha_{cut})$  dan  $c(\alpha_{cut})$ . Adapun ilustrasi fungsi keanggotaan representasi kurva segitiga berbasis *alpha-cut* sebagai berikut:



Gambar 2. Ilustrasi Fungsi Keanggotaan Representasi Segitiga dengan  $\alpha_{cut}$

Nilai  $a(\alpha_{cut})$  dan  $c(\alpha_{cut})$  pada Gambar 2 diperoleh dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$a(\alpha_{cut}) = a + \alpha_{cut} (b - a) \tag{3}$$

$$c(\alpha_{cut}) = c - \alpha_{cut} (c - b) \tag{4}$$

Berdasarkan Persamaan (3-4) maka untuk setiap nilai fuzzy  $\tilde{f}_{jk}$  akan menghasilkan  $a_{1jk}(\alpha_{cut})$  dan  $a_{3jk}(\alpha_{cut})$  sehingga persamaannya berubah menjadi sebagai berikut :

$$a_{1jk}(\alpha_{cut}) = a_{1jk} + \alpha_{cut} (a_{2jk} - a_{1jk}) \tag{5}$$

$$a_{3jk}(\alpha_{cut}) = a_{3jk} - \alpha_{cut} (a_{3jk} - a_{2jk}) \tag{6}$$

Kemudian, nilai fuzzy  $\tilde{f}_{jk}$  ditransformasi ke dalam nilai representatif dari TFN menggunakan *fuzzy median transformation* yang merupakan titik yang membagi kurva fungsi keanggotaan himpunan fuzzy menjadi dua wilayah yang sama [10]. Metode ini digunakan karena distribusi data fuzzy akan menjadi asimetris dimana area fungsi keanggotaan dianggap memiliki ketidakjelasan dan tidak terpengaruh oleh nilai ekstrim. Persamaan defuzzifikasi dari transformasi median menggunakan TFN berbasis *alpha-cut* sebagai berikut:

$$\tilde{r}_{jk}(\alpha_{cut}) = \begin{cases} a_{3jk}(\alpha_{cut}) - \sqrt{\frac{(a_{3jk}(\alpha_{cut}) - a_{1jk}(\alpha_{cut}))(a_{3jk}(\alpha_{cut}) - a_{2jk})}{2}} \\ a_{1jk}(\alpha_{cut}) + \sqrt{\frac{(a_{3jk}(\alpha_{cut}) - a_{1jk}(\alpha_{cut}))(a_{2jk} - a_{1jk}(\alpha_{cut}))}{2}} \end{cases} \tag{7}$$

dengan persamaan pertama digunakan apabila nilai  $a_{2jk} \leq \frac{a_{3jk}(\alpha_{cut}) + a_{1jk}(\alpha_{cut})}{2}$  dan persamaan kedua digunakan apabila nilai  $a_{2jk} > \frac{a_{3jk}(\alpha_{cut}) + a_{1jk}(\alpha_{cut})}{2}$ . Setiap himpunan fuzzy  $a_{ijk}$  berbasis *alpha-cut* dan transformasi median dinyatakan ke dalam nilai representatif  $\tilde{r}_{jk}(\alpha_{cut})$ , sehingga data dari  $m$  pengamatan dinyatakan oleh matriks  $\tilde{\mathbf{R}}(\alpha_{cut})$  sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{R}}(\alpha_{cut}) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11}(\alpha_{cut}) & \tilde{r}_{21}(\alpha_{cut}) & \dots & \tilde{r}_{l1}(\alpha_{cut}) \\ \tilde{r}_{12}(\alpha_{cut}) & \tilde{r}_{22}(\alpha_{cut}) & \dots & \tilde{r}_{l2}(\alpha_{cut}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{r}_{1m}(\alpha_{cut}) & \tilde{r}_{2m}(\alpha_{cut}) & \dots & \tilde{r}_{lm}(\alpha_{cut}) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Selanjutnya dalam pembuatan diagram kontrol fuzzy  $T^2$  Hotelling diperlukan parameter varians dan *mean*. Nilai representatif dari fuzzy number  $\tilde{f}_{jk}$  berbasis *alpha-cut* untuk setiap karakteristik kualitas ke- $j$  dihitung rata-ratanya dengan notasi  $\tilde{\tilde{r}}_j(\alpha_{cut})$  yang berbentuk skalar menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\tilde{\tilde{r}}_j(\alpha_{cut}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \tilde{r}_{jk}(\alpha_{cut}) \tag{9}$$

dengan vektor *mean*  $\tilde{\tilde{\mathbf{r}}}(\alpha_{cut})$  yang berukuran  $l \times 1$  yang berisi rata-rata dari nilai representatif pada setiap karakteristik kualitas ( $\tilde{\tilde{r}}_j(\alpha_{cut})$ ) sebagai berikut:

$$\left( \tilde{\tilde{\mathbf{r}}}(\alpha_{cut}) \right)^T = [\tilde{\tilde{r}}_1(\alpha_{cut}) \ \tilde{\tilde{r}}_2(\alpha_{cut}) \ \dots \ \tilde{\tilde{r}}_p(\alpha_{cut})] \tag{10}$$

Untuk matriks kovariansi berbasis *alpha-cut* ( $\mathbf{S}(\alpha_{cut})$ ) berukuran  $l \times l$  yang berisi varian dari nilai representatif dan kovarian antar karakteristik kualitas yang diperoleh dari persamaan sebagai berikut:

$$s_j^2(\alpha_{cut}) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (r_{jk}(\alpha_{cut}) - \bar{r}_j(\alpha_{cut}))^2 \tag{11}$$

Adapun kovariansi antara karakteristik kualitas ke- $j$  dan karakteristik kualitas ke- $j^*$  sebagai berikut:

$$s_{jj^*}(\alpha_{cut}) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (r_{jk}(\alpha_{cut}) - \bar{r}_j(\alpha_{cut}))(r_{j^*k} - \bar{r}_{j^*}(\alpha_{cut})); j \neq j^* \tag{12}$$

Matriks kovariansi dari sampel dengan  $\alpha_{cut}$  ( $\mathbf{S}(\alpha_{cut})$ ) dinyatakan berikut:

$$\mathbf{S}(\alpha_{cut}) = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1^2(\alpha_{cut}) & \tilde{s}_{12}(\alpha_{cut}) & \cdots & \tilde{s}_{1l}(\alpha_{cut}) \\ \tilde{s}_{21}(\alpha_{cut}) & \tilde{s}_2^2(\alpha_{cut}) & \cdots & \tilde{s}_{2l}(\alpha_{cut}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}_{l1}(\alpha_{cut}) & \tilde{s}_{l2}(\alpha_{cut}) & \cdots & \tilde{s}_l^2(\alpha_{cut}) \end{bmatrix} \tag{13}$$

dengan menggunakan matriks kovariansi berbasis *alpha-cut* ( $\mathbf{S}(\alpha_{cut})$ ) dan vektor *mean* berbasis *alpha-cut* ( $\bar{\mathbf{r}}(\alpha_{cut})$ ) maka diperoleh nilai statistik *fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling berbasis *alpha-cut* untuk setiap subgroup ke- $k$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T_{fk}^2(\alpha_{cut}) = (\mathbf{r}_k(\alpha_{cut}) - \bar{\mathbf{r}}(\alpha_{cut}))^T (\mathbf{S}(\alpha_{cut}))^{-1} (\mathbf{r}_k(\alpha_{cut}) - \bar{\mathbf{r}}(\alpha_{cut})) \tag{14}$$

Keterangan:

$T_{fk}^2(\alpha_{cut})$  = nilai statistik *fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling berbasis *alpha-cut* untuk setiap subgroup ke- $k$

$\mathbf{r}_k(\alpha_{cut})$  = vektor nilai representatif dari bilangan *fuzzy f<sub>jk</sub>* dengan berbasis *alpha-cut* pada subgroup ke- $k$

$\bar{\mathbf{r}}(\alpha_{cut})$  = vektor *mean* berbasis *alpha-cut* berisi rata-rata dari nilai representatif setiap karakteristik kualitas

$(\mathbf{S}(\alpha_{cut}))^{-1}$  = invers dari matriks kovariansi sampel berbasis *alpha-cut*

Sebelum membuat plot dari diagram kontrol *fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling, dilakukan perhitungan nilai batas kontrol yang terdiri dari *Upper Control Limit* (UCL) dan *Lower Control Limit* (LCL) yang diperoleh melalui persamaan sebagai berikut:

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} B_{\alpha, \frac{l(m-l-1)}{2}}; LCL = 0, \text{ karena } T^2 \geq 0 \text{ (tidak akan pernah negatif)} \tag{15}$$

dimana  $B_{\alpha, \frac{l(m-l-1)}{2}}$  adalah kuantil ke- $(1 - \alpha)$  dari distribusi Beta dengan parameter  $\frac{l}{2}$  dan  $\frac{(m-l-1)}{2}$ .

### C. Prosedur Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah jumlah hasil produksi batako *press* yang tersedia di UD Tiga Beton, Sulawesi Tengah yang dikelompokkan terlebih dahulu sesuai kondisinya ke dalam tiap kategori. Berdasarkan sifat tampak terdapat dua karakteristik kualitas yang secara nampak mempengaruhi kualitas batako *press* yaitu kondisi fisik ( $X_1$ ) dan kondisi bidang permukaan ( $X_2$ ). Kondisi fisik ( $X_1$ ) terdiri dari empat kategori yaitu utuh (baik), sumpil (kurang baik), retak (agak cacat), dan patah (cacat). Kondisi bidang permukaan ( $X_2$ ) terdiri dari dua kategori yaitu kasar (baik) dan halus (kurang baik). Data hasil pengelompokkan terdiri dari 30 pengamatan yang berisi 50 sampel pada setiap karakteristik kualitas disajikan sebagai berikut:

Tabel 1. Data Penelitian

Pengamatan ke-	Kondisi Fisik ( $X_1$ )				Kondisi Bidang Permukaan ( $X_2$ )	
	Patah	Retak	Sumpil	Utuh	Halus	Kasar
1	0	3	0	47	0	50
2	0	0	2	48	0	50
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
29	1	1	1	47	3	47
30	0	2	0	48	2	48

Tahapan analisis penelitian ini adalah aplikasi diagram kontrol multivariat *fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling berbasis *alpha-cut* dan transformasi median melalui pengontrolan kualitas produksi batako *press* dengan langkah-langkahnya sebagai berikut:

- 1) Membentuk matriks fungsi keanggotaan tiap karakteristik kualitas berdasarkan penilaian ahli atau pemilik dari perusahaan produksi batako *press*.
- 2) Melakukan proses *fuzzifikasi* dengan mentransformasi data pengamatan ke dalam himpunan bilangan *fuzzy* menggunakan matriks fungsi keanggotaan *Triangular Fuzzy Number* (TFN).
- 3) Melakukan proses *defuzzifikasi* untuk mendapatkan nilai representatif menggunakan metode *Fuzzy Median Transformation* berbasis *alpha-cut* dengan nilai yang digunakan sebesar 0,6.
- 4) Menghitung vektor *mean* dan invers matriks kovariansi dari nilai representatif dengan berbasis *alpha-cut*.
- 5) Mendapatkan nilai statistik *fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling berbasis *alpha-cut*.
- 6) Mendapatkan nilai UCL dan LCL.
- 7) Memplotkan dan mengevaluasi diagram kontrol multivariat *fuzzy T<sup>2</sup>* Hotelling berbasis *alpha-cut*.

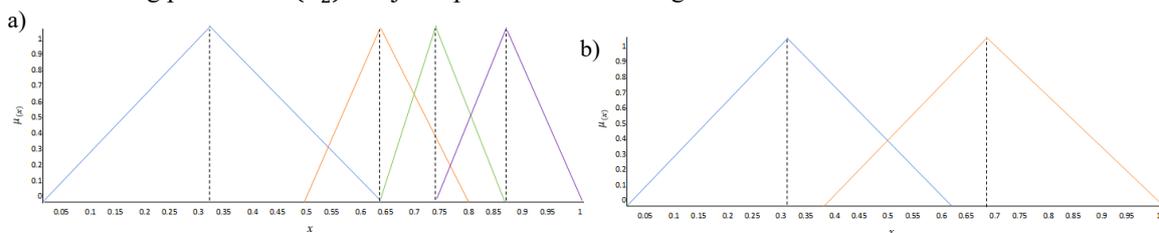
### III. Hasil dan Pembahasan

Tahapan awal dalam aplikasi diagram kontrol *fuzzy* multivariat yang diusulkan adalah membentuk matriks fungsi keanggotaan. Pada penelitian ini menggunakan *Triangular Fuzzy Number* (TFN) dari representasi kurva segitiga yang memiliki tiga titik yaitu a, b, dan c. Pembentukannya berdasarkan harga jual yang berlaku di UD Tiga Beton sesuai kondisi batako *press* pada tiap kategori karakteristik kualitas untuk TFN disajikan dalam Tabel 2. sebagai berikut:

Tabel 2. Daftar Harga Batako *Press* untuk TFN

No	Kategori	Harga Batako <i>Press</i> (Ribu Rupiah)		
		a	b	c
1	Patah	1000	1650	2300
2	Retak	2000	2300	2600
3	Sumpil	2300	2500	2700
4	Utuh	2500	2750	3000
6	Halus	2200	2450	2700
7	Kasar	2500	2750	3000

Berdasarkan Tabel 2 diketahui harga jual batako *press* tiap kategori dari tiap karakteristik kualitas menggunakan TFN. Selanjutnya, melakukan normalisasi agar nilai harga tersebut berada dalam rentang 0-1. Kemudian, dari ketiga titik hasil normalisasi tersebut dapat dibentuk kurva segitiga untuk setiap kategori pada tiap karakteristik kualitas. Ilustrasi fungsi keanggotaan TFN untuk karakteristik kualitas kondisi fisik ( $X_1$ ) dan kondisi bidang permukaan ( $X_2$ ) disajikan pada Gambar 3 sebagai berikut:



Gambar 3. Ilustrasi Fungsi Keanggotaan TFN untuk : a)  $X_1$  dan b)  $X_2$

Berdasarkan Gambar 3 dapat diketahui ilustrasi fungsi keanggotaan TFN pada kedua karakteristik kualitas yang nilainya berasal dari Tabel 2 yang telah di normalisasi. Adapun matriks fungsi keanggotaan menggunakan TFN sebagai berikut:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,325 & 0,650 \\ 0,500 & 0,650 & 0,800 \\ 0,650 & 0,750 & 0,850 \\ 0,750 & 0,875 & 1,000 \end{bmatrix}; \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,3125 & 0,6250 \\ 0,3750 & 0,6875 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks fungsi keanggotaan tersebut akan dilakukan proses *fuzzifikasi* dengan mentransformasi bilangan *crisp* menjadi bilangan *fuzzy*. Dari 50 pengamatan pada Tabel 1 dilakukan perhitungan nilai proporsinya dan dilanjutkan menggunakan Persamaan 2. Misalkan, contoh perhitungan pada pengamatan pertama untuk memperoleh nilai *fuzzy input* sebagai berikut:

$$\tilde{f}_{11}^T = [0 \ 0,06 \ 0 \ 0,94] \times \begin{bmatrix} 0,000 & 0,325 & 0,650 \\ 0,500 & 0,650 & 0,800 \\ 0,650 & 0,750 & 0,850 \\ 0,750 & 0,875 & 1,000 \end{bmatrix} = [0,735 \ 0,862 \ 0,988]$$

$$\tilde{f}_{21}^T = [0 \ 1] \times \begin{bmatrix} 0,000 & 0,313 & 0,625 \\ 0,375 & 0,688 & 1,000 \end{bmatrix} = [0,375 \ 0,688 \ 1]$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh nilai *fuzzy input* pada karakteristik kualitas pertama ( $X_1$ ) pengamatan pertama ( $\tilde{f}_{11}^T$ ) terdiri atas  $a_{111} = 0,735$ ,  $a_{211} = 0,862$ , dan  $a_{311} = 0,988$ . Sedangkan nilai *fuzzy input* pada karakteristik kualitas kedua ( $X_2$ ) pengamatan pertama ( $\tilde{f}_{21}^T$ ) terdiri atas  $a_{121} = 0,375$ ,  $a_{221} = 0,688$ , dan  $a_{321} = 1$ . Kemudian, setiap nilai  $\tilde{f}_{jk}$  tersebut ditransformasi ke dalam nilai representatif kurva segitiga menggunakan *fuzzy median transformation* yang disebut proses *defuzzifikasi* yang berbasis *alpha-cut* sehingga nilai  $a_{1jk}$  dan  $a_{3jk}$  menjadi  $a_{1jk}(\alpha_{cut})$  dan  $a_{3jk}(\alpha_{cut})$ .

Ketika nilai *alpha-cut* semakin mendekati 1 maka monitoring menjadi lebih ketat, sedangkan nilai *alpha-cut* yang mendekati 0 maka dapat mengurangi keketatan monitoring. Oleh karena itu, pada penelitian ini menggunakan nilai *alpha-cut* sebesar 0,6 dengan mempertimbangkan sifat produk dan proses manufaktur. Selain itu, diagram kontrol yang lebih ketat dapat menyebabkan resiko perusahaan menjadi lebih besar. Dengan demikian, dilakukan perhitungan nilai  $a_{1jk}(\alpha_{cut})$  dan  $a_{3jk}(\alpha_{cut})$  menggunakan persamaan 5 dan 6 dengan nilai *alpha-cut* sebesar 0,6. Misalkan, contoh perhitungan pengamatan pertama seperti contoh sebelumnya:

$$a_{111}(\alpha_{cut}) = 0,735 + 0,6 (0,862 - 0,735) = 0,811$$

$$a_{311}(\alpha_{cut}) = 0,988 - 0,6 (0,988 - 0,862) = 0,912$$

Perhitungan nilai *fuzzy input* ( $\tilde{f}_{jk}$ ) berbasis *alpha-cut* pada 29 pengamatan lainnya untuk masing-masing karakteristik kualitas diperoleh dengan cara yang sama. Kemudian, hasil tersebut dilanjutkan pada proses *defuzzifikasi* dari transformasi median menggunakan fungsi keanggotaan TFN berbasis *alpha-cut*. Proses *defuzzifikasi* ini menggunakan persamaan 7 yang memiliki syarat dengan contoh perhitungan sebagai berikut :

Persamaan pertama dalam (7) digunakan apabila memenuhi syarat berikut:

$$a_{211} \leq \frac{a_{311}(\alpha_{cut}) + a_{111}(\alpha_{cut})}{2} = 0,862 \leq \frac{0,912 + 0,811}{2} = 0,862 \leq 0,862$$

Persamaan kedua dalam (7) digunakan apabila memenuhi syarat berikut:

$$a_{211} > \frac{a_{311}(\alpha_{cut}) + a_{111}(\alpha_{cut})}{2} = 0,862 > \frac{0,912 + 0,811}{2} = 0,862 > 0,862$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas maka yang memenuhi syarat adalah persamaan pertama dalam (7) sehingga perhitungannya sebagai berikut:

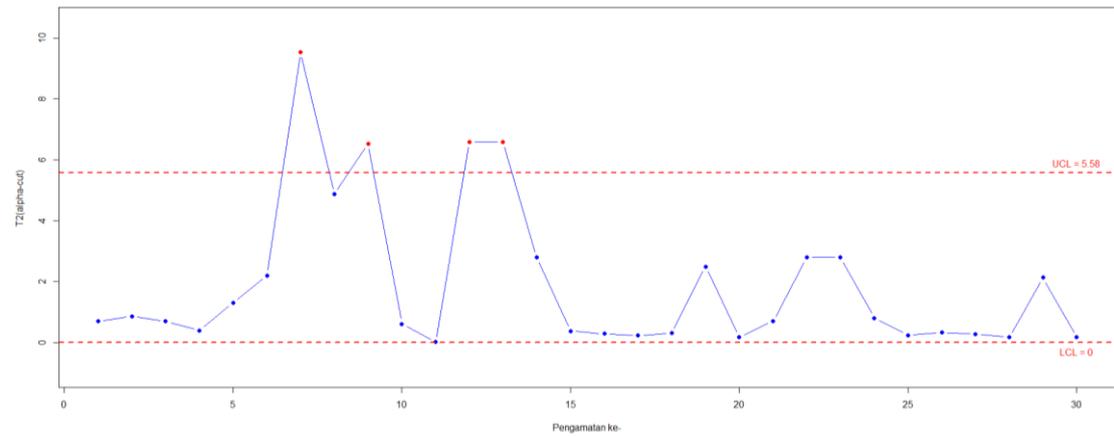
$$\tilde{r}_{11}(\alpha_{cut}) = 0,912 + \sqrt{\frac{(0,912 - 0,811)(0,912 - 0,862)}{2}} = 0,862$$

Berdasarkan perhitungan di atas pada pengamatan pertama menggunakan persamaan pertama dalam (7) didapatkan nilai representatif berbasis *alpha-cut* sebesar 0,862. Proses selanjutnya adalah menghitung nilai statistik *fuzzy T<sup>2</sup> Hotelling* berbasis *alpha-cut* ( $T_k^2(\alpha_{cut})$ ) menggunakan persamaan (14). Namun, menghitung dahulu vektor *mean* berbasis *alpha-cut* ( $\bar{r}(\alpha_{cut})$ ) menggunakan persamaan (9-10) dan matriks varians kovariansi berbasis *alpha-cut* ( $S(\alpha_{cut})$ ) menggunakan persamaan (11-13). Hasil perhitungan dengan menggunakan persamaan tersebut pada seluruh pengamatan disajikan pada Tabel 3 sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Representatif dan Statistik untuk TFN

Pengamatan (k)	Nilai Representatif			Pengamatan (k)	Nilai Representatif		
	$r_{1k}(\alpha_{cut})$	$r_{2k}(\alpha_{cut})$	$T_k^2(\alpha_{cut})$		$r_{1k}(\alpha_{cut})$	$r_{2k}(\alpha_{cut})$	$T_k^2(\alpha_{cut})$
1	0,8615	0,6875	0,695	16	0,8660	0,6875	0,290
2	0,8700	0,6875	0,858	17	0,8660	0,6800	0,231
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	0,8750	0,6875	2,795	29	0,8570	0,6650	2,131
15	0,8635	0,6875	0,378	30	0,8660	0,6725	0,179

Berdasarkan Tabel 3 diketahui nilai representatif  $r_{jk}(\alpha_{cut})$  dan nilai statistik  $T_k^2(\alpha_{cut})$  pada seluruh pengamatan dengan masing-masing karakteristik kualitasnya untuk TFN. Selanjutnya, menentukan UCL pada TFN menggunakan persamaan (15) yakni sebesar 5,58. Kemudian, dilakukan plot berdasarkan nilai pada Tabel 3 dengan UCL = 5,58 dan LCL = 0. Hasil analisis didapatkan plot untuk diagram kontrol multivariat *fuzzy T<sup>2</sup> Hotelling* berbasis *alpha-cut* sebesar 0,6 untuk TFN disajikan pada Gambar 4 sebagai berikut:



Gambar 4. Plot Diagram Kontrol *Fuzzy* Multivariat berbasis *alpha-cut* 0,6

Berdasarkan Gambar 4 menunjukkan terdapat empat pengamatan yang berada di atas UCL yaitu pengamatan ke 7, 9, 12, dan 13 sehingga dapat disimpulkan proses produksi berada dalam keadaan *out of control*. Selain itu, pada Gambar 4 juga menunjukkan pengamatan ke 6 dan 11 belum terdeteksi mengalami *out of control* tetapi sudah berada disekitar batas kontrol. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat keragaman atau variasi yang signifikan pada data produksi sehingga disinyalir terdapat kemungkinan penurunan kualitas dan harus segera dilakukan pengecekan pada setiap proses produksi.

Hasil penerapan diagram kontrol multivariat *fuzzy T<sup>2</sup> Hotelling* berbasis *alpha-cut* sebesar 0,6 dan transformasi median menunjukkan proses produksi batak *press* di UD Tiga Beton berada dalam keadaan *out of control*. Hal ini dapat menjadi peringatan bagi perusahaan agar segera melakukan pengidentifikasian penyebab atau faktor-faktor yang mengakibatkan terindikasi pengamatan berada diluar batas kontrol. Pemilihan nilai *alpha-cut* pada dasarnya tergantung pada pemilik maupun manajer kualitas perusahaan dikarenakan semakin besar nilai *alpha-cut* maka semakin ketat diagram kontrol yang dihasilkan dengan tetap mempertimbangan resiko dari kosumen maupun perusahaan. Selain itu, penggunaan transformasi median pada proses *defuzzifikasi* memiliki kemudahan dalam penerapannya pada diagram kontrol *fuzzy* multivariat khususnya *fuzzy T<sup>2</sup> Hotelling* berbasis *alpha-cut* dibandingkan penggunaan transformasi COM pada penelitian sebelumnya.

#### IV. Kesimpulan dan saran

Berdasarkan hasil penelitian menunjukkan bahwa diagram kontrol multivariat *fuzzy T<sup>2</sup> Hotelling* berbasis *alpha-cut* dan transformasi median dengan fungsi keanggotaan *Triangular Fuzzy Number* (TFN) mampu mendeteksi pergeseran proses produksi dengan lebih sensitif. Hal ini ditandai dengan terdeteksinya pengamatan yang berada dalam keadaan *out of control* pada proses produksi batak *press* di UD Tiga Beton. Hasil ini juga membuktikan bahwa penggunaan metode ini efektif dalam mengidentifikasi kondisi di luar batas kendali yang berpotensi menurunkan kualitas produk. Keunggulan metode ini terletak pada kesederhanaan perhitungan *fuzzy median transformation* dan kemampuan penggunaan *alpha-cut* dalam mendeteksi pergeseran *mean* yang kecil. Dengan demikian, pendekatan ini dapat digunakan sebagai sistem monitoring yang adaptif, akurat dan praktis bagi berbagai perusahaan dalam menjaga stabilitas proses produksi dan mempertahankan kualitas produk.

#### Daftar Pustaka

- [1] R. B. Yoson, "Analisis Kualitas Produk dan Korelasinya Terhadap Tingkat Kepuasan Konsumen dengan Metoda Statistical Process Control," *SINERGI*, vol. 21, no. 3, p. 231, Nov. 2017, doi: 10.22441/sinergi.2017.3.010.
- [2] D. C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 7th ed. Don Fowley, 2013.
- [3] H. Moheb Alizadeh, A. R. A. Khamseh, and S. M. T. Fatemi Ghomi, "Fuzzy Development of Multivariate Variable Control Charts Using the Fuzzy Likelihood Ratio Test," 2010.
- [4] A. A. Azizah, S. Idris, and L. Wachidah, "Diagram Kontrol Fuzzy Multinomial Untuk Data Linguistik," 2016, pp. 117–126.
- [5] M. Hossein, Z. Sabegh, A. Mirzazadeh, S. Salehian, and G.-W. Weber, "A Literature Review on the Fuzzy Control Chart; Classifications & Analysis," *International Journal of Supply and Operations Management*, vol. 1, no. 2, pp. 167–189, 2014.

- [6] H. Alipour and R. Noorossana, "Fuzzy multivariate exponentially weighted moving average control chart," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 48, no. 9–12, pp. 1001–1007, Jun. 2010, doi: 10.1007/s00170-009-2365-4.
- [7] H. Taleb, M. Limam, and K. Hirota, "Multivariate Fuzzy Multinomial Control Charts," *Qual Technol Quant Manag*, vol. 3, no. 4, pp. 437–453, 2006.
- [8] A. Kesumawati, M. Mashuri, and Irhamah, "Identifikasi Sinyal Out of Control pada Diagram Kontrol Fuzzy Multivariat pada Produksi Botol RC Cola 800 Ml Pt. Iglas (Persero) Gresik," in *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta*, Surabaya, 2012.
- [9] A. Al-Refaie, D. Ghanim, and R. H. Fouad, "Development of a Fuzzy Hotelling T2 Control Chart with Alpha Cuts for Linguistic Quality Characteristics," *ARPJN Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 14, pp. 1155–1171, 2019, [Online]. Available: [www.arpnjournals.com](http://www.arpnjournals.com)
- [10] A. Z. Fuady, "Study of Fuzzy C Control Chart and Its Application in the Production Process RC Cola Bottle," Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2016.